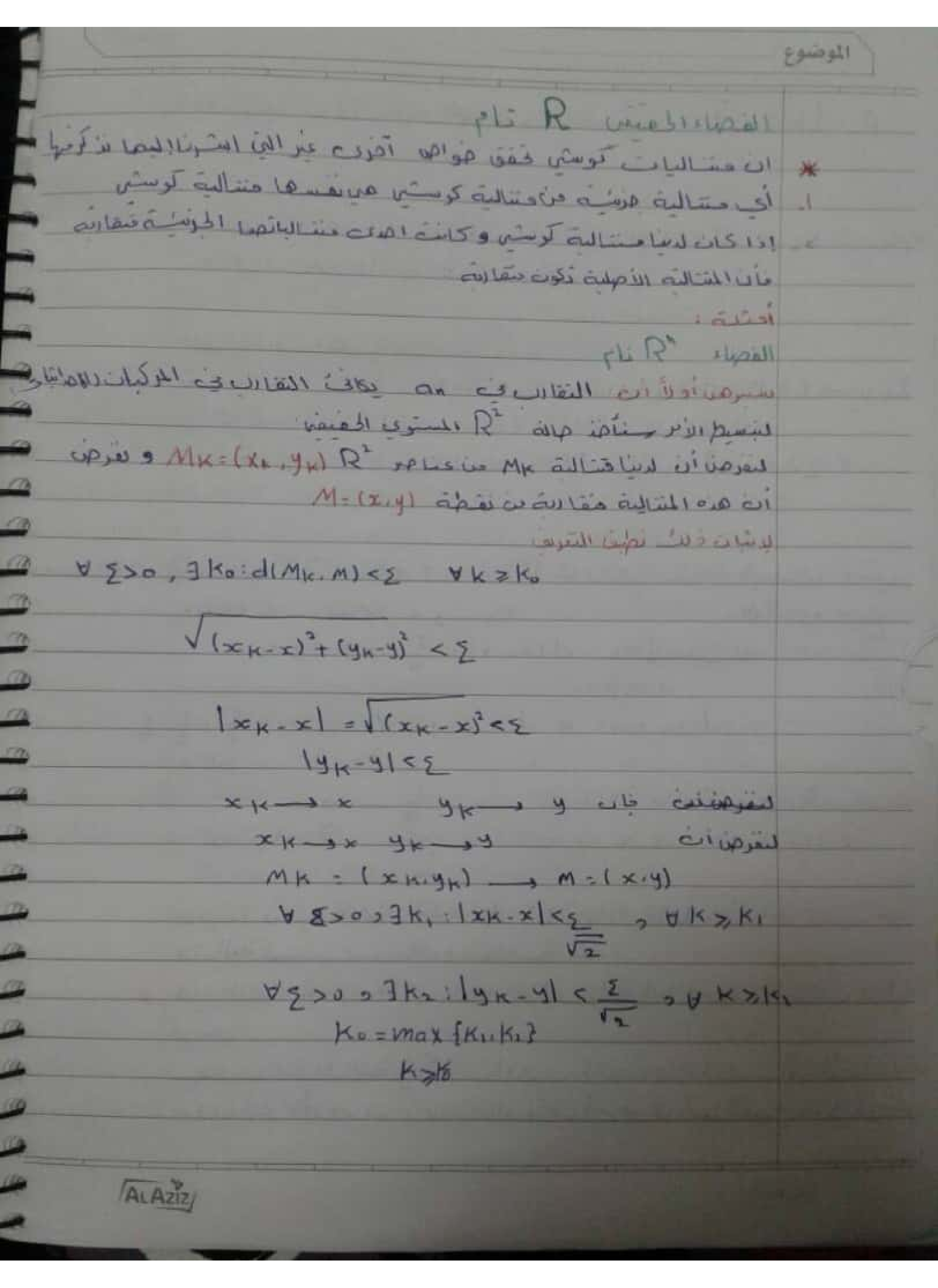


الموضوع

الفضاء الحقيقي تام R

* ان متتاليات كوشي تحقق خواص أخرى غير التي اشترطناها التي ذكرناها

1. أي متتالية جزئية من متتالية كوشي هي بنفسها متتالية كوشي

2. إذا كان لدينا متتالية كوشي و كانت احدى متتالياتها الجزئية متقاربة فان المتتالية الأصلية تكون متقاربة

أمثلة :

الفضاء R^n تام

سنبرهن أولاً أن التقارب في a_n يكافئ التقارب في المركبات للاحداثيات

لتبسيط الأمر سنأخذ حالة R^2 المستوي الحقيقي

لنفرض أن لدينا متتالية M_K من عناصر R^2 $M_K=(x_k,y_k)$ و نفرض

أن هذه المتتالية متقاربة من نقطة $M=(x,y)$

لإثبات ذلك نطبق التعريف

$$\forall \varepsilon>0 , \exists k_0 : d(M_k,M)<\varepsilon \quad \forall k\geq k_0$$

$$\sqrt{(x_k-x)^2+(y_k-y)^2}<\varepsilon$$

$$|x_k-x|=\sqrt{(x_k-x)^2}<\varepsilon$$

$$|y_k-y|<\varepsilon$$

لنفرض أن $x_k \to x$ $y_k \to y$

لنفرض أن $x_k \to x$ $y_k \to y$

$$M_k=(x_k,y_k) \longrightarrow M=(x,y)$$

$$\forall \varepsilon>0 , \exists k_1 : |x_k-x|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} , \forall k\geq k_1$$

$$\forall \varepsilon>0 , \exists k_2 : |y_k-y|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} , \forall k\geq k_2$$

$$k_0=\max\{k_1,k_2\}$$

$$k\geq k_0$$

ALAZIZ

$$(x_k - x)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$(y_k - y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

بجذر الطرفين نحصل على $\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2} < \varepsilon$

$$d(M_k, M) < \varepsilon$$

$$M_k \to M$$

نثبت أن الفضاء تام

نأخذ متتالية كوشي كيفية $M_k(x_k, y_k)$ هل يؤدي إلى أن

x_k متتالية كوشي في R ، R تام x_k متقاربة من x

وبالمثل R تام y_k متقاربة من y

$y_k \to y$ متتالية كوشي في R

وبالتالي هذا يؤدي إلى $M_k \to M(x,y) \in R^2$

الفضاء $C[a,b]$ تام فضاء الدوال الحقيقية المستمرة على $[a,b]$

هو فضاء تام $a \le x \le b$ $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)|\}$

فضاء تام ويعود السبب في ذلك لأن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب منتظم

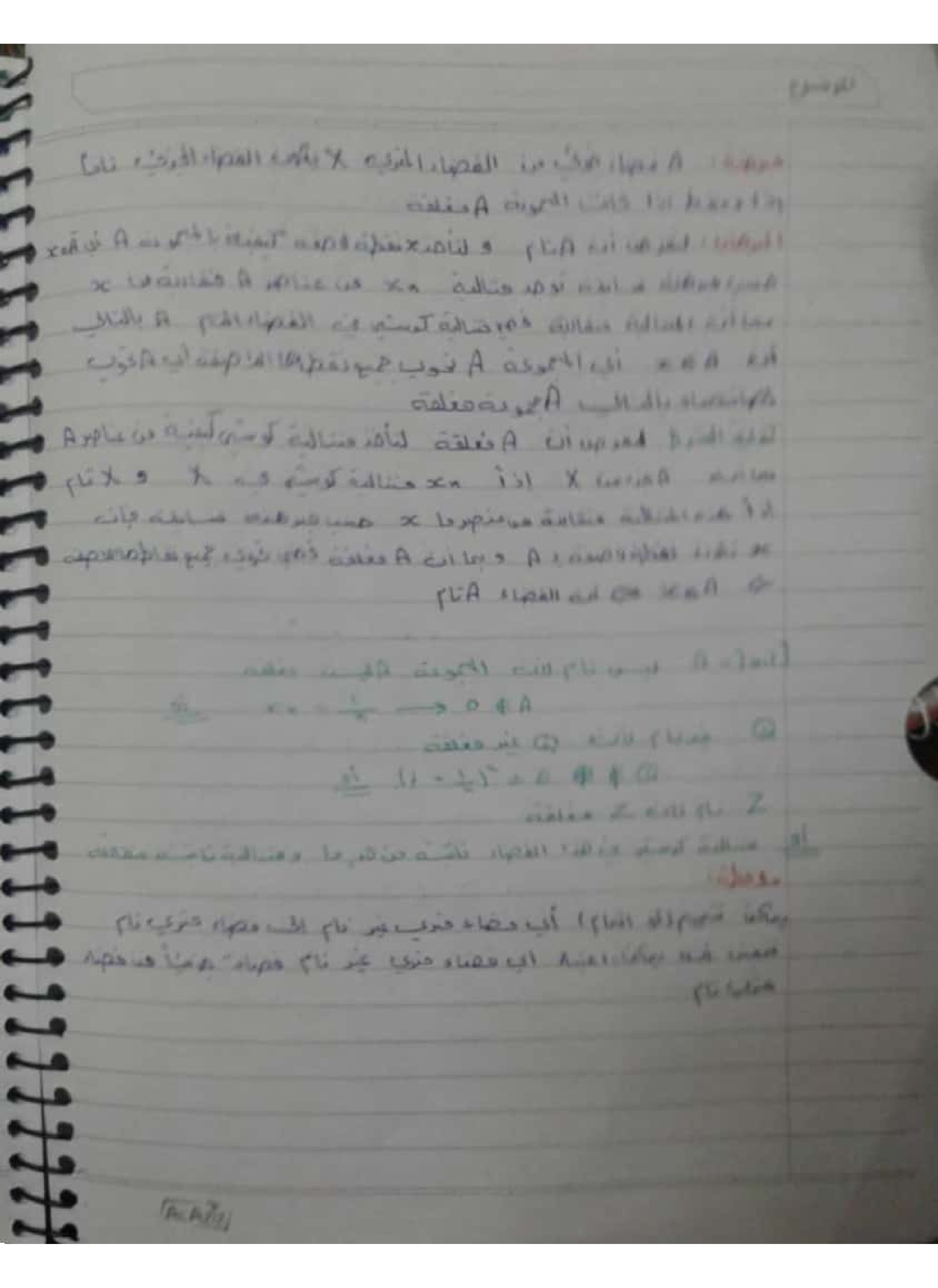
الفضاء المتري المتقطع (X,d) تام

نأخذ متتالية كوشي كيفية في هذا الفضاء

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n,m \ge n_0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \qquad d(x_n, x_m) = 0 \Leftrightarrow x_n = x_m$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \frac{1}{10}, \forall n,m \ge n_0$$



مبرهنة: A فضاء جزئي من الفضاء المتري X التام فإن الفضاء الجزئي تام إذا وفقط إذا كانت المجموعة A مغلقة

البرهان: نفرض أن A تام و لتكن x نقطة تراكم لـ A [illegible] $x \in A$ [illegible] يوجد متتالية x_n من عناصر A متقاربة من x [illegible] بما أن المتتالية متقاربة فهي متتالية كوشي في الفضاء التام A بالتالي فإن $x \in A$ أي المجموعة A تحوي جميع نقاط التراكم [illegible] بالتالي A مجموعة مغلقة

لإثبات العكس نفرض أن A مغلقة لتكن متتالية كوشي من عناصر A [illegible] X إذاً x_n متتالية كوشي في X و X تام إذاً هذه المتتالية متقاربة من نقطة x [illegible] x نقطة تراكم لـ A و بما أن A مغلقة فهي تحوي جميع نقاط التراكم $\Leftarrow x \in A$ ومنه الفضاء A تام

مثال: A =]0,1] ليس تام لأن المجموعة [illegible] مغلقة

$x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin A$

Q فضاء ليس تام لأنه Q غير مغلقة

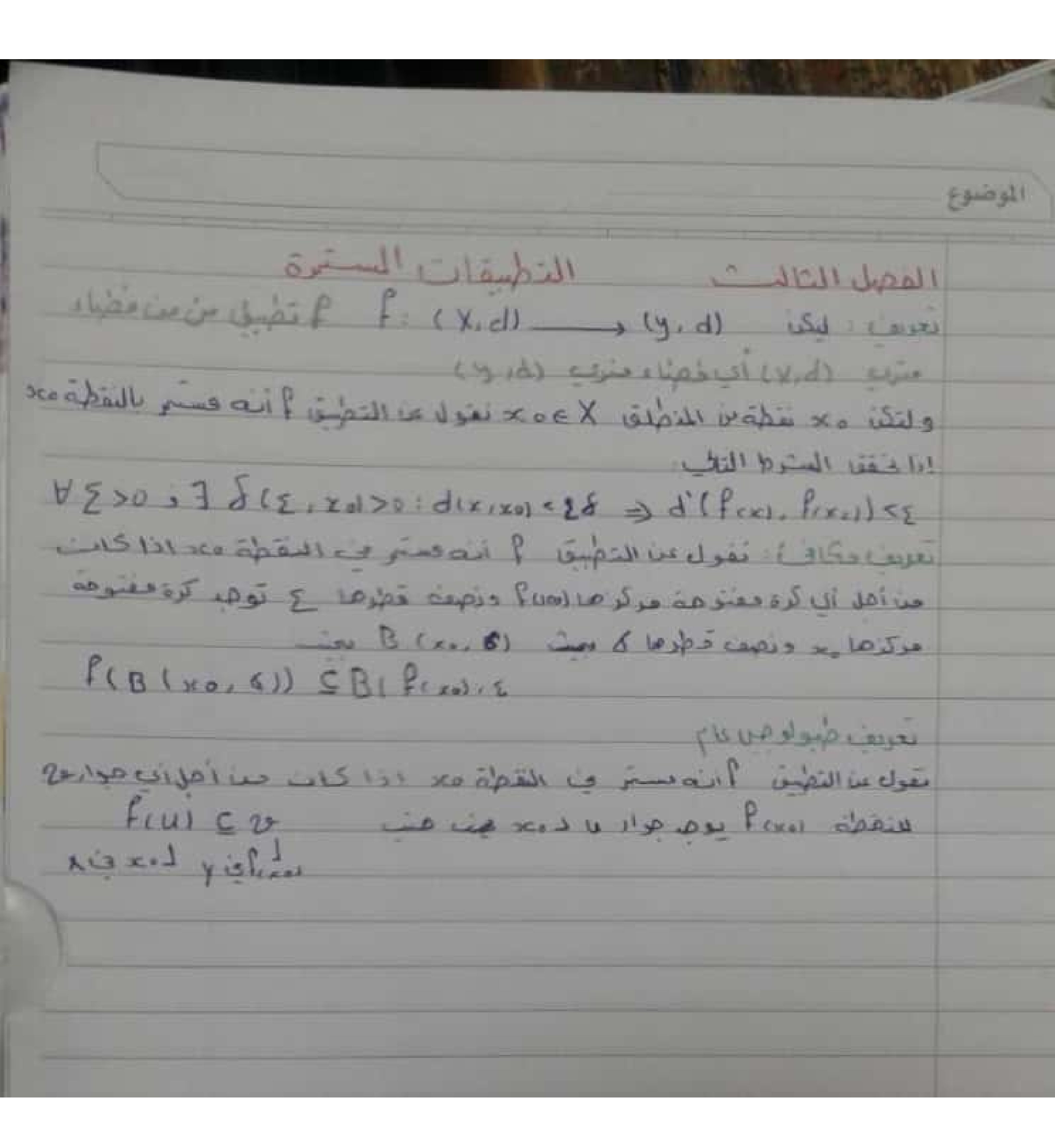
[illegible]

Z تام لأنه Z مغلقة

[illegible]

ملاحظة:

يمكننا تعميم (أو إتمام) أي فضاء متري غير تام إلى فضاء متري تام [illegible] أي فضاء متري غير تام [illegible] جزءاً من فضاء متري تام



الموضوع

الفصل الثالث — التطبيقات المستمرة

تعريف: ليكن $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ تطبيق من فضاء متري (X, d) أي فضاء متري (Y, d')

وليكن x_0 نقطة من المنطلق $x_0 \in X$ نقول عن التطبيق f أنه مستمر بالنقطة x_0 إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

تعريف مكافئ: نقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة x_0 اذا كان من أجل أي كرة مفتوحة مركزها $f(x_0)$ ونصف قطرها ε توجد كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها δ بحيث $B(x_0, \delta)$ بحيث

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

تعريف طبولوجي عام

نقول عن التطبيق f أنه مستمر في النقطة x_0 اذا كان من أجل أي جوار V للنقطة $f(x_0)$ يوجد جوار U لـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq V$

معناه أي $f^{-1}(V)$ لـ x_0 في X